

P5 Spring Cup Mathematical Olympiad Sample Questions  
Answers and solutions

1. 答案: 190

【解析】

法一: 直接计算, 适用于本题项数较少的情况:

$$1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + 7 \times 8 + 9 \times 10 = 2 + 12 + 30 + 56 + 90 = 190$$

法二: 适用于项数更多, 直接计算太复杂的情况:

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 + 3 \times 4 + 5 \times 6 + 7 \times 8 + 9 \times 10 \\ &= (2-1) \times 2 + (4-1) \times 4 + (6-1) \times 6 + (8-1) \times 8 + (10-1) \times 10 \\ &= (2 \times 2 + 4 \times 4 + 6 \times 6 + 8 \times 8 + 10 \times 10) - (2 + 4 + 6 + 8 + 10) \\ &= 4 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) - 2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \\ &= 4 \times (5 \times (5+1) \times (5 \times 2 + 1) \div 6) - 2 \times (5 \times (5+1) \div 2) \\ &= 220 - 30 \\ &= 190 \end{aligned}$$

2. 答案: 144

解析: 二班人数为  $42 \times \frac{6}{7} = 36$  (人), 三班人数为  $36 \times \frac{5}{6} = 30$ , 四班人数为  $30 \times 1.2 = 36$ 。

所以五年级共有  $42 + 36 + 30 + 36 = 144$  (人)。

3. 答案: 27

【解析】

分情况讨论, 一共有三种情况

1. 不选全能工人, 需要从 3 个 fitter 里选 2 人, 从 3 个 turner 里选 2 人, 一共  $3 \times 3 = 9$  种
2. 选全能工人当 fitter; 还需从 3 个 fitter 里选 1 人, 从 3 个 turner 里选 2 人, 共  $3 \times 3 = 9$  种
3. 选全能工人当 turner; 还需从 3 个 fitter 里选 2 人, 从 3 个 turner 里选 1 人, 共  $3 \times 3 = 9$  种

三种情况, 共计  $9+9+9=27$  种

4. 答案: 8

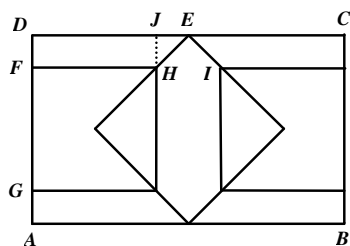
【解析】

Shaded circle 扫过的图形是一个环形, 其面积等于大圆减小圆。其中如果小圆 (white circle) 半径看作 1, 那么大圆的半径是 3。相应地, 大圆面积是小圆的 9 倍, 扫过的环形面积是小圆的 8 倍。

5. 答案：96

【解析】

长方形面积 =  $DC \times DA = 180$ ，中间的斜置正方形面积 =  $\text{对角线}^2 \div 2 = DA^2 \div 2 = 54$ 。对比可得， $DC:DA=180:108=5:3$ 。从而有， $DE:DA=5:6$ 。由于给定图形的对称性，可知  $\angle DEH = \angle CEI$ ，则它们都是  $45^\circ$ ，那么作  $HJ$  垂直  $DE$  于  $J$  点，可得到等腰直角三角形  $HJE$ ，有  $JE=JH$ ， $JE=JH=DF$ ， $DJ=FH=FG$ ，则有  $JE+DJ=DF+FG$ ，也就是  $DE=DG$ 。已求得  $DE:DA=5:6$ ， $DE=DG$ ，所以  $DG:GA=5:1$ ，从而  $DF:FG:GA=1:4:1$ 。假设  $DA$  是  $6a$ ，那么  $FG$  就是  $4a$ 。中间斜置正方形面积为  $DA^2 \div 2 = 54$ ，所以  $36a^2 = 108$ ，得到  $a^2 = 3$ 。左右两个正方形面积之和为  $FG^2 \times 2 = 16a^2 \times 2 = 32a^2 = 32 \times 3 = 96$ 。



## P6 Spring Cup Mathematical Olympiad Sample Questions Answers and solutions

1. 答案：1024

【解析】

分母  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$  为等比数列，通过等比数列的性质得  $1 + 1 - \frac{1}{32} = \frac{63}{32}$ 。

最终计算结果为  $2016 \times \frac{32}{63} = 1024$ 。

2. 答案：384

【解析】

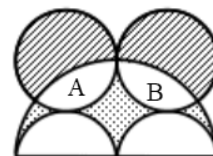
若选择顺时针方向行走，从 A 所在的小线段走到下一根小线段上，有 2 种走法（走外圈或内圈），从第 2 根小线段走到第 3 根小线段上，有 2 种走法（走外圈或内圈），以此类推可见顺时针共  $2^8 = 256$  种走法。但若从 A 处的第 1 根小线段走到第 2 根小线段所走的是内圈，则回到原点时不能走内圈，否则重复，有  $2^6 = 64$  种走法不符合题目要求。所以顺时针方向行走共有  $2^8 - 2^6 = 256 - 64 = 192$  种走法，同理逆时针方向行走也有 192 种走法，共  $2 \times 192 = 384$  种走法。

3. 答案：314

【解析】

利用差不变原理：

$$\begin{aligned}
 & \text{大半圆外阴影面积} - \text{大半圆内阴影面积} \\
 &= (\text{大半圆外阴影面积} + A + B) - (\text{大半圆内阴影面积} + A + B) \\
 &= \text{两个小圆} - (\text{大半圆} - \text{两个小半圆}) \\
 &= \text{两个小圆} - (\text{两个小圆} - \text{一个圆}) \\
 &= \text{一个小圆} \\
 &= \pi \times 10^2 \\
 &= 314
 \end{aligned}$$



4. 答案：33

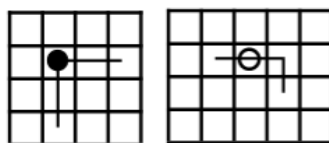
【解析】

假设这杯酒精共有 100 份。开始时：酒精 32 份，水 68 份。第一次：倒掉  $\frac{1}{2}$ ，酒精剩  $32 \times \frac{1}{2} = 16$  份，用水加满后，酒精仍是 16 份，水有  $100 - 16 = 84$  份。第二次：倒掉  $\frac{1}{3}$ ，水剩  $84 \times \frac{2}{3} = 56$  份，用酒精加满后，水仍然是 56 份，水有  $100 - 56 = 44$  份。第三次：倒掉  $\frac{1}{4}$ ，酒精剩  $44 \times \frac{3}{4} = 33$  份，用水加满后，酒精仍然是 33 份。

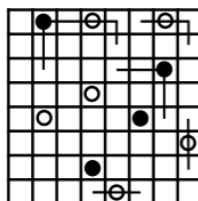
5. 答案：20

【解析】

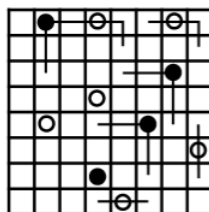
依题意，黑点和白点处的画线方式应如下图所示：



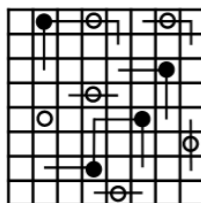
按照题目例子给的摆放方式，我们可以先确定其中 1 个黑点和 4 个白点的画线方式：



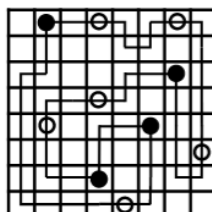
在上图的基础上，可以确定 2 个黑点的画线方式：



又在上图的基础上，可以确定剩下黑点和 1 个白点的画线方式：



最后完成这个回路：



一共拐了 20 次弯。