

分数计算

一、基本概念和性质

1、分数的基本的性质：分子分母同时乘或除以相同的数（零除外），分数的大小不变。

分子、分母同时乘上一个相同的数（零除外），这是通分（把分母变得通用）。

分子、分母同时除以一个相同的数（零除外），这是约分（把分数变得简单）。

例：通分： $\frac{2}{5} = \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$ ； 约分 $\frac{6}{15} = \frac{6 \div 3}{15 \div 3} = \frac{2}{5}$

注：计算题中，最后的结果都要写成最简分数（分子、分母除了1以外没有其他公因数）的形式，即分子分母同时除以一个相同的数（零除外），直到只有1可以除，就不用再除了。

例： $\frac{48}{72} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ ， $\frac{2}{3}$ 是一个最简分数。

2、分数的分类：真分数和假分数

真分数：分子小于分母。例： $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

假分数：分子等于或大于分母。例 $\frac{5}{5}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \dots$

3、假分数和带分数

$\frac{6}{5}$ 表示将单位“1”平均分成5份，取其中的6份，很显然它是完整取走一个单位“1”，还在

另一个单位“1”中取走1份。即 $6 \div 5 = 1 \dots 1$ ，故 $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5}$ ，注意当整数加上一个真分数时，

它们之间的加号可以省略，即 $\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5} = 1\frac{1}{5}$ 。 $1\frac{1}{5}$ 是一个带分数，可以形象理解为整数带上一个

真分数。再举一个例子： $\frac{26}{5}$ ， $26 \div 5 = 5 \dots 1$ ，即 $\frac{26}{5} = 5 + \frac{1}{5} = 5\frac{1}{5}$ 。

既然假分数可化为带分数，同样带分数也可化为假分数，是个逆过程。

例： $5\frac{1}{5}$ ，由分母5知单位“1”被平均分成5份，而整数5表示有5个完整的单位“1”，则一

共取走 $5 \times 5 + 1 = 26$ 份，即 $\frac{26}{5}$ 。再例， $7\frac{5}{6} = \frac{7 \times 6 + 5}{6} = \frac{47}{6}$

【练习1】 Convert the following improper fractions to mixed fractions

$$\frac{12}{5} =$$

$$\frac{28}{9} =$$

$$\frac{111}{16} =$$

$$\frac{37}{3} =$$

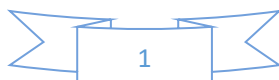
【练习2】 Convert the following mixed fractions to improper fractions

$$4\frac{2}{7} =$$

$$2\frac{5}{27} =$$

$$12\frac{4}{13} =$$

$$7\frac{1}{25} =$$



二、分数加减

1、同分母分数相加减：分母不变，分子相加减

$$\text{例：} \frac{5}{18} + \frac{7}{18} = \frac{5+7}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \quad \frac{7}{16} - \frac{5}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

2、异分母分数相加减：先通分转化为同分母分数，再加减。（最重要的第一步，先找到两个分母的最小的公共的倍数）

$$\begin{aligned} \text{例：} \frac{2}{3} + \frac{1}{7} &= \frac{2 \times 7}{3 \times 7} + \frac{1 \times 3}{7 \times 3} = \frac{14}{21} + \frac{3}{21} = \frac{17}{21} \\ \frac{1}{6} + \frac{5}{8} &= \frac{1 \times 4}{6 \times 4} + \frac{5 \times 3}{8 \times 3} = \frac{4}{24} + \frac{15}{24} = \frac{19}{24} \\ \frac{4}{5} - \frac{7}{15} &= \frac{4 \times 3}{5 \times 3} - \frac{7}{15} = \frac{12}{15} - \frac{7}{15} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

3、带分数参与分数加减法：将带分数写出整数+真分数的形式，其他运算和同分母异分母加减类似，只是在减法中注意借位，在加法中注意进位的情况

$$\begin{aligned} \text{例：} 5\frac{6}{7} - \frac{2}{7} &= 5 + \frac{6}{7} - \frac{2}{7} = 5 + \frac{4}{7} = 5\frac{4}{7} \\ 5\frac{4}{7} - \frac{1}{6} &= 5 + \frac{4}{7} - \frac{1}{6} = 5 + \frac{4 \times 6}{7 \times 6} - \frac{1 \times 7}{6 \times 7} = 5 + \frac{24}{42} - \frac{7}{42} = 5 + \frac{17}{42} = 5\frac{17}{42} \\ 4\frac{1}{5} - \frac{2}{5} &= 3 + 1\frac{1}{5} - \frac{2}{5} = 3 + \frac{1 \times 5 + 1}{5} - \frac{2}{5} = 3 + \frac{6}{5} - \frac{2}{5} = 3 + \frac{4}{5} = 3\frac{4}{5} \quad (\text{分数部分相减不够，所以需要向整数部分借 1，即借位情况}) \end{aligned}$$

$$3\frac{5}{12} + 2\frac{1}{12} = 3 + \frac{5}{12} + 2 + \frac{1}{12} = 5 + \frac{6}{12} = 5 + \frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$$

$$6\frac{11}{18} + 5\frac{13}{18} = 6 + \frac{11}{18} + 5 + \frac{13}{18} = 11 + \frac{24}{18} = 11 + \frac{4}{3} = 11 + 1\frac{1}{3} = 12\frac{1}{3} \quad (\text{这里分数部分相加得到假分数，要化为带分数再和前面整数相加，因为带分数是整数带上真分数，即进位情况})$$

【练习 3】Calculate

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{5}$$

$$\frac{7}{12} + \frac{5}{18}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + 2\frac{1}{4}$$

$$\frac{7}{8} - \frac{5}{12} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{3}{8} - \frac{2}{5}$$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10}$$

$$1\frac{2}{5} + 2\frac{1}{5}$$

$$12\frac{4}{7} - 3\frac{6}{7}$$

$$5\frac{5}{6} + 4\frac{5}{6}$$

$$12\frac{27}{28} + 1\frac{3}{4} + \frac{1}{28} - \frac{3}{4}$$

三、分数乘除

1、分数乘法

(1) 基本运算法则：分子相乘，分母相乘。

计算技巧：能约分，提前约分（分数乘法中约分有两种：一是处于分子位置的数可以和处于分母位置的数约分，二是整数可以和处于分母位置的数约分，这是因为整数可以写成分之几的形式，例 $5 = \frac{5}{1}$ ）

一定要注意：最后结果要是最简分数的形式

例： $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ ，可以发现由于乘法的运算法则，两个分数相乘，最后所有的分子

会以相乘的形式出现在计算结果的分子位置，所有分母会以相乘的形式出现在计算结果的分母的位置，为了使计算简单，我们不会选择把它们都乘在一起后再约分，而是再把它

们乘在一起前就约分。则 $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{1 \times 3}{5 \times 2} = \frac{3}{10}$ ；例： $\frac{11}{15} \times \frac{5}{33} = \frac{1}{15} \times \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

(2) 带分数参与乘法：将带分数化为假分数的形式，分数乘法的运算法则是分子相乘，分母相乘，所以我们也希望带分数也写成只有分子和分母的形式，即假分数的形式

例： $5\frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{16}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{16}{1} \times \frac{1}{8} = \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2$ （注意一分之几要化为整数形式才是规范）

【练习 4】Calculate

$$\frac{2}{7} \times \frac{4}{5}$$

$$\frac{5}{12} \times 3$$

$$\frac{5}{6} + \frac{5}{3} \times \frac{4}{5}$$

$$\frac{5}{12} \times \frac{7}{15} \times \frac{3}{14}$$

$$2\frac{2}{5} - \frac{2}{5} \times 4$$

$$1\frac{3}{4} \times \frac{5}{14}$$

2、分数除法

先明确一个概念：倒数，即乘积为 1 的两个数互为倒数。例： $\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$ ，所以 $\frac{2}{5}$ 和 $\frac{5}{2}$ 互为倒

数； $6 \times \frac{1}{6} = \frac{6}{1} \times \frac{1}{6} = 1$ ，所以 6 和 $\frac{1}{6}$ 互为倒数。

由倒数我们可知，1 除以一个数就等于它的倒数。例： $1 \div \frac{2}{5} = \frac{5}{2}$ ；

同样 $6 \div \frac{2}{5} = 6 \times 1 \div \frac{2}{5} = 6 \times (1 \div \frac{2}{5}) = 6 \times \frac{5}{2} = \frac{6}{1} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{1} = 15$ （注意因为前面是乘号，所以给后面的除法加上括号，不影响计算结果）

推广到除法中，会发现除以一个数相当于乘上它的倒数。

例： $\frac{7}{15} \div \frac{14}{3} = \frac{7}{15} \times \frac{3}{14} = \frac{1}{15} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

同样带分数在除法中，也是要先化为假分数。

例： $2\frac{1}{7} \div 1\frac{4}{11} = \frac{15}{7} \div \frac{15}{11} = \frac{15}{7} \times \frac{11}{15} = \frac{11}{7}$

【练习 5】Calculate

$$\frac{4}{7} \div \frac{5}{12}$$

$$\frac{4}{5} \div 3$$

$$\frac{12}{7} \div \frac{4}{3} \times 7$$

$$12 \div \frac{6}{11}$$

$$1\frac{5}{13} \div \frac{3}{5}$$

$$2\frac{1}{6} \div 1\frac{6}{7}$$

Calculate

1、 $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$

2、 $\frac{5}{8} - \frac{3}{8}$

3、 $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

4、 $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$

5、 $\frac{5}{9} + \frac{1}{3}$

6、 $\frac{1}{2} - \frac{1}{10}$

7、 $\frac{3}{5} + \frac{1}{15}$

8、 $\frac{8}{9} + \frac{11}{18}$

9、 $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

10、 $2 - \frac{3}{4}$

11、 $\frac{4}{9} + \frac{1}{10} + \frac{5}{9}$

12、 $\frac{1}{12} + \frac{3}{8} + \frac{11}{12} + \frac{5}{18}$

13、 $\frac{5}{6} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$

14、 $\frac{11}{12} - (\frac{1}{6} + \frac{1}{8})$

15、 $11 - \frac{7}{10} - \frac{3}{10}$

16、 $\frac{7}{12} - (\frac{3}{4} - \frac{1}{2})$

17、 $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{3}{10}$

18、 $\frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{5}{24}$

19、 $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{4}{15}$

20、 $\frac{7}{8} - (\frac{1}{2} + \frac{3}{16})$

21、 $\frac{2}{9} + (\frac{9}{10} - \frac{2}{5})$

22、 $\frac{17}{20} - (\frac{2}{5} + \frac{9}{20})$

23、 $\frac{3}{4} - \frac{2}{9} + \frac{1}{4}$

24、 $\frac{5}{6} - \frac{4}{9} + \frac{1}{6} - \frac{2}{9}$

25、 $\frac{5}{8} + \frac{1}{8} - \frac{3}{10} - \frac{1}{10}$

26、 $\frac{3}{7} + \frac{8}{15} + \frac{4}{7} + \frac{7}{15}$

27、 $\frac{5}{9} - \frac{2}{11} + \frac{4}{9} - \frac{9}{11}$

28、 $\frac{5}{12} + \frac{5}{18} - \frac{7}{24}$

29、 $15\frac{4}{25} + 3\frac{1}{4} + 2\frac{3}{4} + 4\frac{21}{25}$

30、 $15 - 2\frac{7}{9}$

31、 $20 - 1\frac{2}{11} - 4\frac{10}{11}$

32、 $10 - 2\frac{7}{12} - 4\frac{5}{6}$

33、 $\frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - \frac{3}{4})$

34、 $5 + \frac{4}{9} + \frac{5}{6} - \frac{4}{9}$

35、 $1\frac{4}{9} + (\frac{5}{9} - \frac{3}{7})$

36、 $6\frac{1}{8} - \frac{5}{6} - \frac{15}{16}$

37、 $\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$

38、 $\frac{7}{9} \div \frac{9}{7}$

39、 $\frac{6}{5} \times \frac{4}{3}$

40、 $\frac{5}{7} \div \frac{15}{2}$

41、 $\frac{8}{9} \times \frac{3}{4}$

42、 $2 \div \frac{5}{6}$

43、 $\frac{4}{5} \div 6$

44、 $8 \times \frac{7}{8}$

45、 $1.8 \times \frac{1}{6}$

46、 $\frac{17}{15} \times 60$

47、 $\frac{33}{13} \div 22$

48、 $34 \times \frac{7}{51}$

49、 $25 \div \frac{15}{16}$

50、 $\frac{22}{39} \times \frac{26}{11}$

51、 $8 \div \frac{12}{13}$

52、 $\frac{3}{4} \times 1.2$

53、 $\frac{3}{10} \div \frac{5}{6}$

54、 $\frac{18}{19} \times \frac{38}{27}$

55、 $34 \div \frac{17}{10}$

56、 $\frac{7}{11} \div 14$

57、 $\frac{5}{6} \times \frac{9}{10} \times \frac{2}{5}$

58、 $\frac{2}{7} \div \frac{4}{3} \times \frac{2}{3}$

59、 $\frac{5}{8} \div \frac{7}{16} \div \frac{4}{11}$

60、 $12 \div \frac{3}{5} \times \frac{3}{25}$

61、 $\frac{1}{2} \times \frac{5}{16} \times \frac{4}{15}$

62、 $\frac{5}{18} \div \frac{2}{3} \times \frac{32}{65}$

63、 $\frac{5}{8} \times \frac{3}{5} \div \frac{11}{12}$

64、 $\frac{7}{5} \div 6 \div 21$

65、 $\frac{11}{12} \div \frac{22}{9} \times \frac{7}{8}$

66、 $\frac{10}{21} \times \frac{12}{25} \times \frac{7}{8}$

67、 $\frac{15}{16} \times \frac{9}{10} \div \frac{5}{12}$

68、 $\frac{5}{14} \div \frac{10}{21} \times \frac{5}{7}$

69、 $\frac{3}{20} \times 14 \times \frac{5}{7}$

70、 $\frac{2}{9} + \frac{1}{2} \div \frac{4}{5} + \frac{3}{8}$

71、 $\frac{8}{13} \div 7 + \frac{1}{7} \times \frac{6}{13}$

72、 $\frac{5}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \div \frac{8}{3}$

73、 $\frac{3}{5} \times \frac{7}{11} + \frac{3}{5} \div \frac{11}{4}$

74、 $6 \div \frac{3}{10} - \frac{3}{10} \div 6$

75、 $14 \times \frac{5}{7} \div 14 \times \frac{5}{7}$

76、 $\frac{3}{8} \times 4 + \frac{3}{8} \times 6$

77、 $\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{5}$

78、 $150 - 144 \times \frac{5}{6}$

79、 $3 - \frac{8}{15} \times \frac{9}{16}$

80、 $\frac{1}{6} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{8}$

81、 $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}$

82、 $\frac{4}{15} + \frac{3}{5} \times \frac{7}{9}$

83、 $(\frac{7}{10} + \frac{3}{4}) \times 5$

84、 $\frac{18}{49} \div \frac{6}{7} + \frac{4}{7}$

85、 $(\frac{7}{12} - \frac{1}{8}) \div \frac{1}{24}$

86、 $(\frac{5}{6} + \frac{7}{8}) \times 24$

87、 $\frac{7}{8} \div 5 + \frac{7}{8} \div 2$

88、 $\frac{7}{10} \times \frac{5}{3} + \frac{4}{15}$

89、 $\frac{4}{15} \times \frac{5}{12} \div \frac{5}{24} + \frac{1}{2}$

90、 $1\frac{4}{7} \times 2\frac{4}{5} \div \frac{5}{11}$

91、 $2\frac{1}{13} \times \frac{5}{11} \times 1\frac{2}{9}$

92、 $2\frac{2}{5} + \frac{4}{15} \div \frac{8}{21}$

93、 $\frac{24}{5} \times \frac{1}{9} + 2\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$

94、 $\frac{1}{3} + \frac{11}{14} \div \frac{1}{4} \times \frac{2}{33}$

95、 $5\frac{5}{12} \times 1\frac{11}{13} \div 7$

96、 $5\frac{2}{3} - \frac{5}{12} \div 2\frac{2}{5}$

97、 $\frac{5}{11} \times 3\frac{5}{13} + 4\frac{3}{5}$

98、 $2\frac{1}{7} \times \frac{3}{25} \div \frac{14}{5}$

99、 $\frac{13}{24} \div 1\frac{7}{8} + \frac{5}{12} \times 1\frac{3}{25}$

100、 $3\frac{4}{7} \times \frac{49}{2} \times 2\frac{2}{5} \div 5\frac{1}{4}$